Funciones

▶ ***Función real de variable real*** es una relación entre dos conj A y B de números, de forma que a cada elemento del conj A (*conj original*), le corresponde un ***único*** elemento del conj B (*conjunto final*)

♦ $\boldsymbol{x \in A}$ se denomina ***variable independiente***, e $\boldsymbol{y \in B}$ ***variable dependiente***

♦ ***Dominio de la función f***, Dom$f \subset \mathbb{R}$,$\boldsymbol{Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists|\ y = f(x) \in \mathbb{R}\}}$

♦ ***Recorrido*** o ***Imagen de f***, Img$f \subset \mathbb{R}$, $\boldsymbol{Img\ f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in Dom\, f \quad con \quad f(x) = y\}}$

▶ **Características de una Función. Estudio Local y Global de una Función**

⋆ **Signo de una función:**

- Si $f(x) > 0$ la gráfica está por **encima** del eje OX.
- Si $f(x) < 0$ la gráfica está por **debajo** del eje OX.

⋆; **Simetrías:**

- $f(x)$ ***par***, si se cumple $\forall\, x \in Dom\, f \;\; f(-x) = f(x)$, entonces $f(x)$ es simétrica respecto OY
- $f(x)$ ***impar***, si se cumple $\forall\, x \in Dom\, f \;\; f(-x) = -f(x)$, entonces $f(x)$ es simétrica respecto $(0,\ 0)$

⋆ **Periodicidad**

Una función es ***periódica*** si su gráfica se repite indefinidamente en su dominio de definición o Una función,$f(x)$, es ***periódica***, de periodo T, cuando $\forall\, x \in Dom\, f,\;\; f(x+T) = f(x)$

⋆ **Acotación**

Una función, $f(x)$, está **acotada** – intuitivamente – cuando su imagen o recorrido esta comprendido entre dos valores, es decir su representación gráfica está comprendida entre dos recta de la forma $y = k$, donde $k \in \mathbb{R}$

⋆ La **monotonía** de una función, $f(x)$, estudia la variación de $f(x)$, respecto a la variable independiente.

- $f(x)$ ***Creciente*** si $\forall\, x_1,\ x_2 \in Dom\, f$ con $x_1 \leq x_2$ se cumple $f(x_1) \leq f(x_2)$
- $f(x)$ ***Decreciente*** si $\forall\, x_1,\ x_2 \in Dom\, f$ con $x_1 \leq x_2$ se cumple $f(x_1) \geq f(x_2)$

⋆ Los **Puntos Críticos (puntos máximos o mínimos)**, son puntos donde la gráfica alcanza, localmente, su valor máximo o mínimo.

⋆ La **concavidad** determina de la posición de las rectas tangente respecto de la gráfica de una función $f(x)$.

- ***Cóncava hacia arriba*** ($\cup$) en $x = a$, si existe un entorno de a, en el que la recta tangente en se encuentra por debajo de la gráfica de la función.
- ***Cóncava hacia abajo*** ($\cap$) en $x = a$, si existe un entorno de a, en el que la recta tangente en se encuentra por encima de la gráfica de la función.

⋆ **Puntos de Inflexión**

Los **puntos de inflexión** son los puntos de la gráfica de la función, donde las rectas tangentes a la gráfica de una curva. La gráfica pasa de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o al revés.

▶ **Operaciones con Funciones**

Sean las funciones $f(x), \quad g(x)$

⋆ **Suma/Diferencia de Funciones** $(f \pm g)\ (x) = f(x) \pm g\ (x)$, donde $Dom\ (f \pm g)\ = Dom\, f \bigcap Dom\ g$

⋆ **Producto de Funciones** $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$, donde $Dom\ (f \cdot g)\ = Dom\, f \bigcap Dom\ g$

⋆ **Cociente de Funciones** $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$, donde $Dom\ (f/g)\ = \left\{Dom\, f \bigcap Dom\, g\right\} - \{x \in\ Dom\ g \mid\ g\ (x) = 0\}$

⋆ **Composición de Funciones** $f \circ g)(x) = f(g(x)$

La ***función inversa*** de $f(x)$, $f^{-1}\ (x)$ a aquella función tal que $\left(f \circ f^{-1}\right)\ (x) = \left(f^{-1} \circ f\right)\ (x) = x$

Limites De Una Función

▶ **Limites de una función en un punto**

El límite de una función $f(x)$, cuando $x \longrightarrow a$, es el valor, L, hacía el que se acerca $f(x)$, cuando $\boldsymbol{x}$ toman valores cada vez más próximos a a.

ecum FORMACIÓN
San Francisco, 3. NAVARRETE
www.ecumformacion.com
ecum@ecumformacion.com
649 986 299

Limites Laterales De Una Función En Un Punto

- **lím de $f(x)$ por la izda de x_0**, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L_{izda}$, es decir, al dar valores cada vez más próximos a x_0 por la izda, los valores de $f(x)$ se acercan a L_{izda} tanto como queramos.
- **lím de $f(x)$ por la dcha de x_0**, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L_{dcha}$, es decir, al dar valores cada vez más próximos a x_0 por la dcha, los valores de $f(x)$ se acercan a L_{dcha} tanto como queramos.

▶ **Propiedades de limite de una función**:

— El ***Limite*** de una ***Función*** en un punto es ***ÚNICO.***

— Para que exista el ***Limite*** de una ***función*** en $x = x_0$, deberán existir los limites laterales de la función en $x = x_0$, ser finitos e iguales.

▶ **Limites Infinitos**

Una función $f(x)$ tiene por límite ∞, cuando $x \longrightarrow a$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, si al dar valores a x próximos a a, los valores de la función son cada vez más grandes/más pequeños.

▶ **Limites de funciones en el infinito**

Una función $f(x)$ tiene por límite L, cuando $x \longrightarrow \infty$ $(-\infty)$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$, si al dar valores a x cada vez más grandes (pequeños), los valores que toma la función se aproximan a L.

▶ **Operaciones con límites**

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones reales de variable real:

⋆ **Suma/Diferencia**: $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

- $\infty \pm a = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $(-\infty) \pm a = -\infty$
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- **IND:** $\infty - \infty$

⋆ **Producto**: $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

- $\infty \cdot \infty = \infty$
- Si $a < 0 \begin{cases} \infty \cdot a = -\infty \\ (-\infty) \cdot a = \infty \end{cases}$
- Si $a > 0 \begin{cases} \infty \cdot a = \infty \\ (-\infty) \cdot a = -\infty \end{cases}$
- **IND:** $0 \cdot \infty$

⋆ **Cociente**: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$

- $\dfrac{a}{\infty} = 0$
- $\dfrac{a}{0} = \pm\infty \quad si \quad a \neq 0$
- $\dfrac{\infty}{0} = \pm\infty$
- $\dfrac{0}{\infty} = 0$
- **IND:** $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$

⋆ **Potencias**: $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x)^{g(x)}\right) = \left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$

- $\infty^{\infty} = \infty$
- $\infty^{-\infty} = 0$
- Si $a > 0 \quad \infty^a = \infty$
- Si $a < 0 \quad \infty^a = 0$
- Si $a \neq 0 \quad a^0 = 1$
- Si $a > 1 \begin{cases} a^{\infty} = \infty \\ a^{-\infty} = 0 \end{cases}$
- Si $0 < a < 1 \begin{cases} a^{\infty} = 0 \\ a^{-\infty} = \infty \end{cases}$
- **IND:** 1^{∞}, 0^0, ∞^0

San Francisco, 3. NAVARRETE
www.ecumformacion.com
ecum@ecumformacion.com
649 986 299

▶Resolución de Indeterminaciones mediante métodos analíticos

El $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, presenta una **indeterminación**, cuando su resultado no se puede determina, sin hacer antes un estudio de la función entorno a x_0.

- ⋆ **IND.** $\infty - \infty$
  - **Diferencia de funciones** Sacar factor común a la mayor potencia de x.
  - **Diferencia de fracciones** Realizar operaciones.
  - **Diferencia de raíces** Multiplicar y dividir por el conjugado de la expresión que origina la indeterminación

- ⋆ **IND:** $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_p x^p}{b_m x^m} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p < m \\ \dfrac{a_p}{b_m} & \text{si} \quad p = m \\ \pm\infty & \text{si} \quad p > m \end{cases}$

- ⋆ **IND.** $(\pm\infty)\,(0)$ Hacer cuentas para transformar la IND, en otra del tipo $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

- ⋆ **IND** $\dfrac{0}{0}$ Factorizamos los polinomios que aparecen en el numerador y denominador, simplificamos y tendemos al límite.

- ⋆ **IND :** $1^{\pm\infty}$ Utilizando la fórmula: $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x))^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)\,(f(x)-1)}$

▶ Aplicación de limite de una función. Asíntotas

Llamamos ***asíntota,*** a la recta a la que se aproxima indefinidamente la gráfica de la función $f(x)$.

⋆ **Asíntota Vertical**

Para determinar las Asíntotas Verticales, estudiaremos el comportamiento del límite de la función $f(x)$ cuando $x \to x_0$ con $x_0 \notin \operatorname{Dom} f$.

- Determinamos $\operatorname{Dom} f$, $\forall x_0 \notin \operatorname{Dom} f$, estudiamos $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, existe una **Asíntota Vertical** de ecuación $x = x_0$.
- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = k \neq \pm\infty$, $\nexists$ Asíntota Vertical para x_0.

  La posición de la gráfica de $f(x)$ respecto de la asíntota viene determinado por el signo de $f(x)$ entorno a $x = x_0$

⋆ **Asíntotas Horizontales, Oblicuas, Ramas Parabólicas**

Para determinar las Asíntotas Horizontales –AH–, Oblicuas –AO– o Ramas Parabólicas –RP–, estudiamos el comportamiento del límite de una función $f(x)$ cuando $x \to \pm\infty$.

- Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, existe una **Asíntota Horizontal** de ecuación $y = L$

  La posición de la gráfica de $f(x)$, respecto de la asíntota $y = L$, viene determinado por el signo de $f(x) - L$.

  Notas:

  ⋆ Si existen asíntotas horizontales, no existen las A. Oblicuas ni Ramas Parabólicas.

  ⋆ Puede que exista una A.Horizontal en el $+\infty$ $(-\infty)$ y una A.Oblicua o R:Parabolica en el $-\infty$ $(+\infty)$

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$, estudiamos el comportamiento de $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$:

- Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ con $m \neq \pm\infty$ y $m \neq 0$, existe una **Asíntota Oblicua** cuya ecuación es $y = m\,x + n$,

  donde $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - m\,x]$

- Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, existe una **Rama Parabólica de eje *OX***
- Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$, la función tiene una **Rama Parabólica de eje *OY***

ecum FORMACIÓN
San Francisco, 3. NAVARRETE
www.ecumformacion.com
ecum@ecumformacion.com
649 986 299

▶ Continuidad de una función

Una función $f(x)$ es **continua** en $x = x_0$ si:

a) Esta definida en x_0 , es decir $f(x_0)$ es un número real o bien $x_0 \in Dom\ f$

b) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

∗ Una función $f(x)$ es **continua** (cont) en $x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

▶ Operaciones con funciones continuas

Sean f y g funciones continuas en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces:

- $k \cdot f(x)$ con $k \in \mathbb{R}$ es continua en $x_0 \in \mathbb{R}$
- $f(x) + g(x)$ es continua en es continua en $x_0 \in \mathbb{R}$.
- $f(x) \cdot g(x)$ es continua es continua en $x_0 \in \mathbb{R}$.
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ si $g(x_0) \neq 0$ es continua es continua en $x_0 \in \mathbb{R}$.
- $(f \circ g)(x)$ es continua en x_0 si $g(x_0) \in \mathrm{Dom} f$.

▶ Discontinuidades. Tipos De Discontinuidades

⋆ f tiene una ***Discont. Evitable*** (Discont. Evit.) en x_0, si $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

1^er^ **Caso** $\exists f(x_0)$ pero $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

2^do^ **Caso** $\nexists f(x_0)$ $(x_0 \notin \mathrm{Dom} f)$

Gráficamente: La gráfica de $f(x)$, tiene un ***agujero en*** $x = x_0$.

⋆ f tiene una ***Discont. Inevitable o Esencial*** (Discont. Inev.) en x_0, si $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

- **Discontinuidad inevitable de salto finito**

$\exists \lim\limits_{x \to x_{0^-}} f(x)$, $\exists f(x_{0^+})$ son reales y finitos pero $\lim\limits_{x \to x_{0^-}} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_{0^+}} f(x)$

Gráficamente: La gráfica de la función $f(x)$, presenta un ***salto finito*** en $x = x_0$.

- **Discontinuidad inevitable de salto infinito o Discontinuidad asintótica**

Los límites laterales son $-\infty$ o $+\infty$, o bien uno de los límites laterales es finito y el otro es $\pm\infty$

Gráficamente: La gráfica de la función $f(x)$, presenta un ***salto infinito*** en $x = x_0$.

San Francisco, 3. NAVARRETE
www.ecumformacion.com
ecum@ecumformacion.com
649 986 299

San Francisco, 3. NAVARRETE
www.ecumformacion.com
ecum@ecumformacion.com
649 986 299